Matematica III

Docenti: Francesca De Marchis e Giulio Galise
CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni,
CdL in Statistica, Economia e Società, CdL in Statistica Gestionale
A.A. 2022/2023

Esercitazione 8

Esercizio 1. Calcolare
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$
nei seguenti casi:

(a) $f(x,y) = y^2\,, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \le x^2+y^2 \le 4\,,\; \frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy^2}{y^3}\,, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 \le y \le 2x^2\,,\; x \le y \le 2x\right\}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}\,, \qquad D$ è l'intersezione della corona circolare di centro l'origine e raggi $r=\pi$ e $R=2\pi$ con l'insieme $\{-y \le x \le 0\}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\,, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 \le 1\,,\; x+y \ge 1\right\}$.

Esercizio 2. Calcolare
$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dy\,.$$

Esercizio 3. Sia $f \in C^0(D)$ con $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, misurabile, limitato e simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che
$$(x,y) \in D \Longleftrightarrow (-x,-y) \in D\,.$$
Provare (usando opportuni cambi di variabile negli integrali) i seguenti fatti:

(i) se $f(-x,-y) = -f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in D$ allora $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$;

(ii) se $f(-x,-y) = f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in D$ allora
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = 2\iint_{D_1^+} f(x,y)\,dxdy = 2\iint_{D_2^+} f(x,y)\,dxdy$$
dove $D_1^+ = \{(x,y) \in D:\; x \ge 0\}$ e $D_2^+ = \{(x,y) \in D:\; y \ge 0\}$.

Stabilire formule analoghe alle (i)-(ii) nei casi

- D simmetrico rispetto all'asse y, cioè $(x,y) \in D \Longleftrightarrow (-x,y) \in D$
- D simmetrico rispetto all'asse x, cioè $(x,y) \in D \Longleftrightarrow (x,-y) \in D$.

Usare quanto appena dimostrato per il calcolo dei seguenti integrali:

$$(1) \quad \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} 1+\sin^{101}(x+y)\,dxdy$$

$$(2) \quad \iint_D x+\cos(x^2+y^2)\,dxdy\,, \qquad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\ |y| \leq |x|\big\}\,.$$

Esercizio 4. Usando gli integrali doppi provare che il volume della sfera $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, con $R > 0$, è $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Esercizio 5. Si scrivano i seguenti insiemi del piano come domini normali in almeno due modi differenti

$$\begin{aligned} D &= \{x, y \geq 0, 0 \leq x^2 - y\} \subseteq \mathbf{R}^2 \\ E &= \{x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq y, x \leq 1\} \subseteq \mathbf{R}^2 \\ F &= \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x^2+y^2-z\} \subset \mathbf{R}^3 \end{aligned}$$

Esercizio 6. Calcolare

$$\int_E (x+y)dxdy$$

con $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

Esercizio 7. Sia Q il quadrilatero di vertici $(1,0), (0,1/2), (-1,0), (0,-1/2)$. Calcolare

$$\int_Q |x^2-4y^2| e^{(x+2y)^2}\,dxdy$$

(*Suggerimento: può essere utile introdurre* $u = x-2y$, $v = x+2y\ldots$)

Esercizio 8. Si calcoli l'area dell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, \sqrt{2}x^2 \leq y \leq \sqrt{6}x^2\}$$

Esercizio 9. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, l'integrale generalizzato

$$\iint_{\{x^2+y^2\geq 1\}} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}}\,dxdy$$

Esercizio 10. Sia $f \in C^0([1,+\infty))$ tale che $f \geq 0$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)\,du = 1$. Calcolare l'integrale generalizzato

$$\iint_D f(xy)\,dxdy$$

essendo $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\ x \leq y \leq 4x\,,\ y \geq \frac{1}{x}\big\}$.
(*Suggerimento: usare* $D_n = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\ x \leq y \leq 4x\,,\ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{n}{x}\big\}$ *come successione invadente*)